

ランダム磁場イジングモデルと 画像のノイズ除去

理学部物理学科3年

野口遥佳

発表内容

1. ベイズ推定による画像修復
2. 人工データ(イジング画像)との結果の比較

発表内容

1.ベイズ推定による画像修復

2.人工データ(イジング画像)との結果の比較

やりたいこと



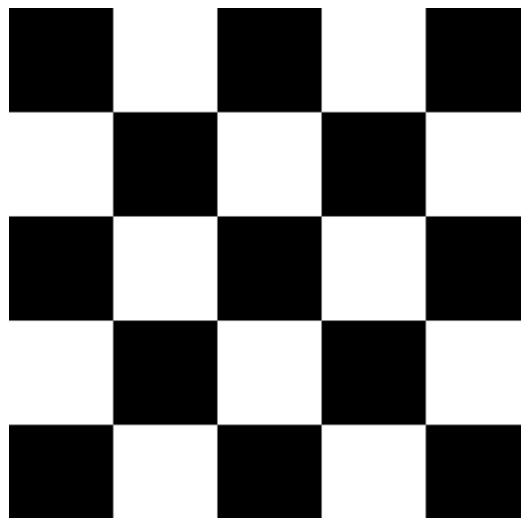
一定の確率でノイズが入る



これを統計力学的に扱いたい

統計力学の問題としての定式化

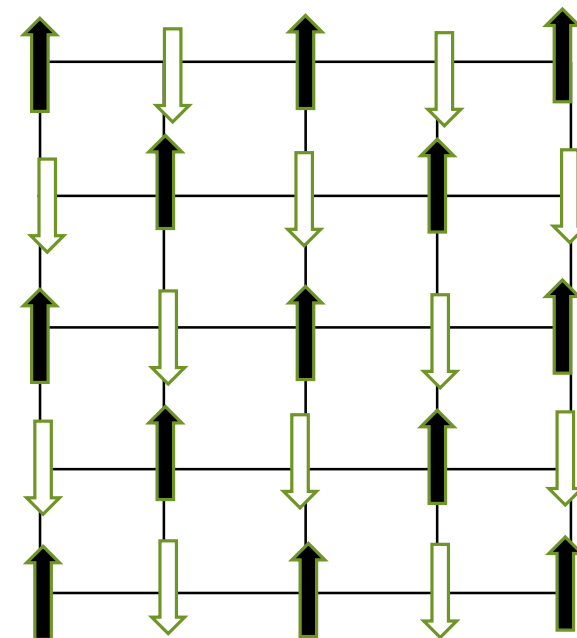
白黒画像



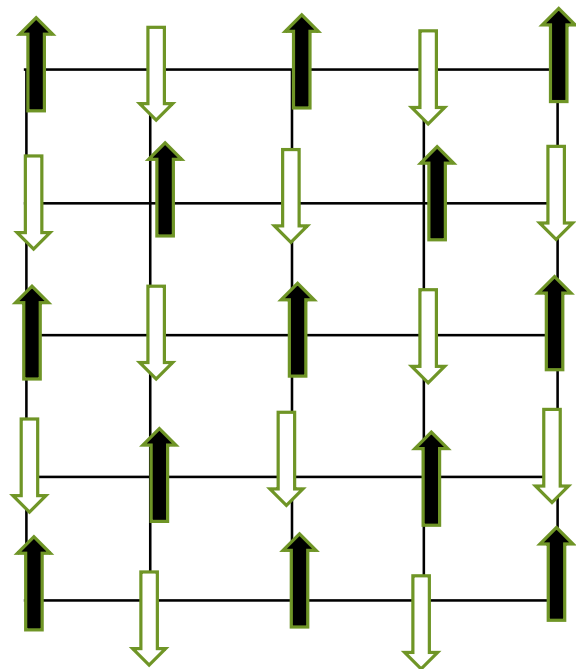
ピクセルの数値をイジングスピンの上下に読み替える



二次元イジングモデル

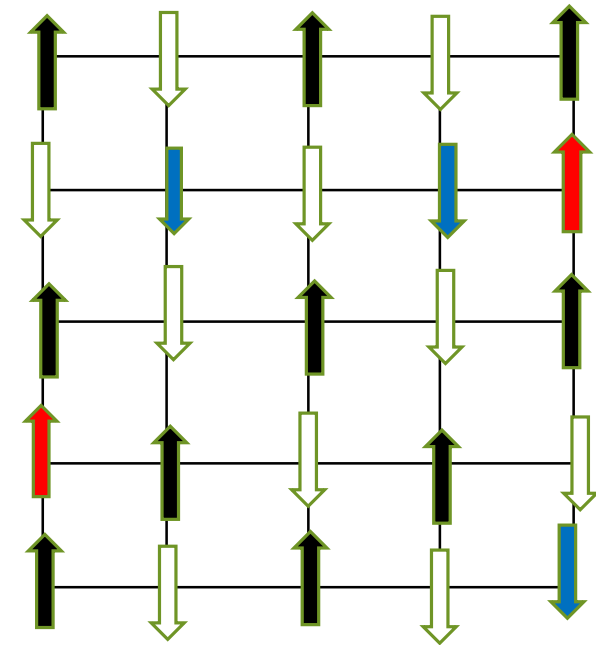


統計力学の問題としての定式化



元のスピン

各スピンが一定の
確率 p で反転する



20%($p=0.2$)でノイズの
入ったスピン

Bayseの定理

...結果から原因を推定する

事象Bを観測データ, 事象Aをデータの発生源だと考える

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{\sum_A P(B|A)P(A)} \quad \dots(1)$$

$P(A|B)$...事後分布 $P(A)$...事前分布 $P(B|A)$...尤度

...観測されたデータから,そのデータが情報源Aから得られたものである確率が得られる

統計力学の問題としての定式化

イジングスピンの組 $\{\xi_i\}$ にノイズが入り $\{\tau_i\}$ になる($i=1,2,\dots,N$)

...確率 p で $\xi_i = -\tau_i$ (スピンが反転)

$$P(\tau_i|\xi_i) = \frac{e^{\beta_p \tau_i \xi_i}}{2 \cosh \beta_p}, \quad \beta_p = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1-p}{p}\right) \dots(2)$$

$$\tau_i = -\xi_i \text{の時}, P(\tau_i|\xi_i) = \frac{e^{-\beta_p}}{2 \cosh \beta_p} = p, \quad \tau_i = \xi_i \text{の時}, P(\tau_i|\xi_i) = \frac{e^{\beta_p}}{2 \cosh \beta_p} = 1 - p$$

各スピンに独立にスピンが作用する状況を考える

$$P(\{\tau_i\}|\{\xi_i\}) = \prod_i P(\tau_i|\xi_i) = \frac{\exp(\beta_p \sum_i \tau_i \xi_i)}{(2 \cosh \beta_p)^N} \dots(2)$$

統計力学の問題としての定式化

Bayseの公式 $P(\{\xi_i\}|\{\tau_i\}) = \frac{P(\{\tau_i\}|\{\xi_i\})P(\{\xi_i\})}{P(\{\tau_i\})} = \frac{P(\{\tau_i\}|\{\xi_i\})P(\{\xi_i\})}{\sum_A P(\{\tau_i\}|\{\xi_i\})P(\{\xi_i\})}$, $\{\tau_i\}$ と $\{\xi_i\}$ を入れ替える.

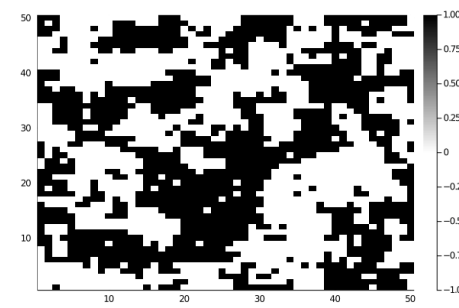
事前分布 (Prior) $P(\{\xi_i\})$ は具体的にはわからない

→元画像は固有の温度 β_m を持つ強磁性イジング模型によって生成されると考える

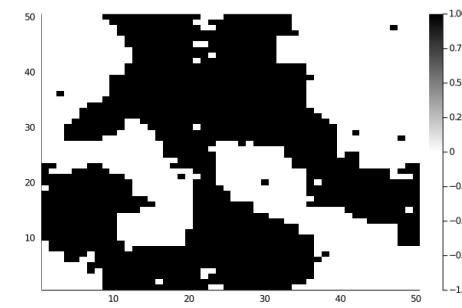
$$P(\{\xi_i\}) = \frac{\exp(\beta_m \sum_{\langle i,j \rangle} \xi_i \xi_j)}{\sum_{\{\sigma_i\}} \exp(\beta_m \sum_{\langle i,j \rangle} \xi_i \xi_j)} \dots (3)$$



$\beta_m = 0.1$



$\beta_m = 0.7$



$\beta_m = 1.2$

統計力学の問題としての定式化

推定画像としての $\{\xi_i\}$ を $\{\sigma_i\}$ と書くことにすると, Bayseの公式に(2)式,(3)式を代入することで

$$P(\{\sigma_i\}|\{\tau_i\}) = \frac{\exp(\beta_m \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j + \beta_p \sum_i \sigma_i \tau_i)}{\sum_{\{\sigma_i\}} \exp(\beta_m \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j + \beta_p \sum_i \sigma_i \tau_i)} \dots (4) \quad \text{が得られる}$$

これは「劣化した画像 $\{\tau_i\}$ が与えられた際に元の画像が $\{\sigma_i\}$ であった」確率

$$\dots H = -\beta_m \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - \beta_p \sum_i \sigma_i \tau_i \dots (5)$$

と考えると温度1におけるランダム磁場イジング模型のボルツマン分布!!

どのように現画像を推定するのか？

1. $P(\{\sigma_i\}|\{\tau_i\})$ を最大にする $\{\sigma_i\}$ が最も現画像に近いと考える (MAP推定)
2. i 番目のピクセルに着目し, $P(\sigma_i = 1|\{\tau_i\})$ と $P(\sigma_i = -1|\{\tau_i\})$ を比較, 確率が高い方を修復画像とする (有限温度推定)

実験に用いる画像



$\beta_m = 0.1$ (常磁性)



Fig1 ランダムな画像



$\beta_m = 0.7$ (臨界点)



Fig2 女性



$\beta_m = 1.2$ (強磁性)



Fig3 大阪大学

MAP推定

$$P(\{\sigma_i\}|\{\tau_i\}) = \frac{\exp(\beta_m \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j + \beta_p \sum_i \sigma_i \tau_i)}{\sum_{\{\sigma_i\}} \exp(\beta_m \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j + \beta_p \sum_i \sigma_i \tau_i)}$$

を最大にする $\{\sigma_i\}$ を修復画像として採用

$E = -\beta_m \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - \beta_p \sum_i \sigma_i \tau_i \dots (5)$ の基底状態を探索する

基底状態を得る手順

1. $n \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$ 番目のスピンを反転させる... $\sigma_n \rightarrow -\sigma_n$
 2. $\Delta E = E(\sigma_i) - E(-\sigma_i)$ を計算し, $\Delta E < 0$ なら反転したスピンを採用, $\Delta E \geq 0$ なら元のスピンを採用
- これをすべての n に対して行う(最急降下法)

実験方法

- ・確率20%($p=0.2$)でノイズの入ったFig 1～3に対し β_m を0から0.03区切りで0.6まで増やしながらMAP推定を行う
- ・修正率を $\text{Accuracy}(\{\sigma_i\}, \{\xi_i\}) \equiv \frac{1}{N} \sum_i \delta(\sigma_i, \xi_i) \dots (7)$ で定義し, 各 β_m に対し修正率をプロットする

MAP推定

元画像

劣化画像

修正画像($\beta_m = 0.3$)

修正画像($\beta_m = 0.6$)

Fig1

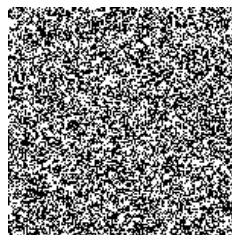
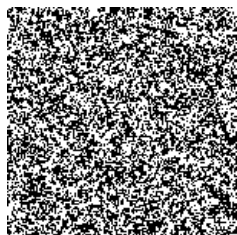


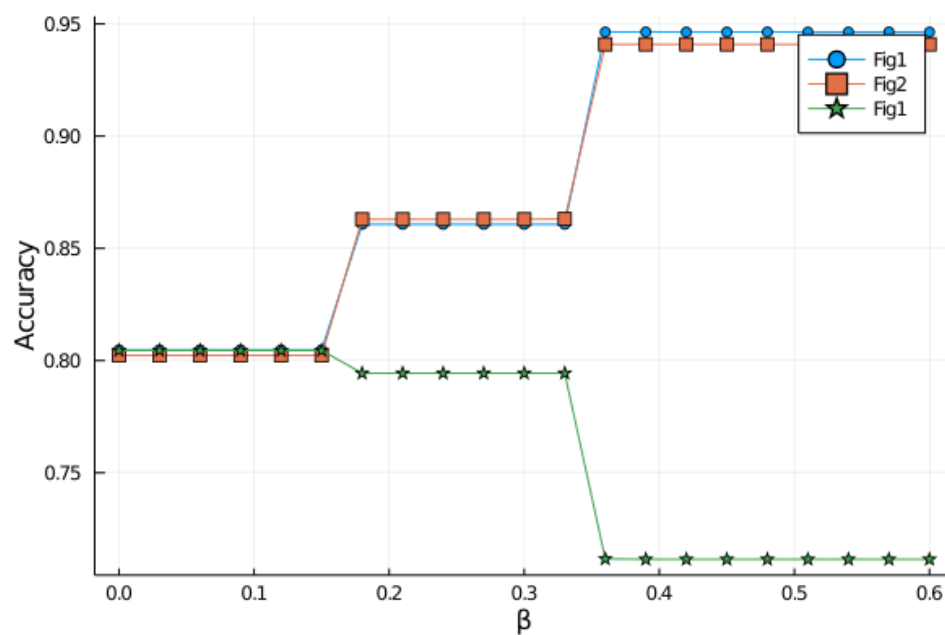
Fig2



Fig3



MAP推定



わかること...

- 1.どの画像も修正率に3つの層がある
($0 < \beta_m < 0.15$, $0.15 < \beta_m < 0.33$, $0.33 < \beta_m$),
- 2.画像による修復率の違いは小さい

発表内容

1. ベイズ推定による画像修復
2. 人工データ(イジング画像)との結果の比較

人工のイジング画像ではどうか？

今回行った画像修復における大きな仮定は「画像は強磁性イジング模型によって生成されている」というものであった

...「実際にイジング模型によって生成された画像の修復率はどうなのか」を調べることでこの仮定の妥当性を確かめることができる

実験方法

1, $\beta_m = 0.2, \beta_m = 0.7, \beta_m = 1.2$ の各温度で 100×100 イジング画像を30枚生成し,それぞれに確率20%でノイズを加える

2.各温度での平均の修復率,標準偏差を調べる

まとめ

自然画像・イジング画像に対しMAP推定を行った

わかったこと

1. まとまりのある画像(臨界点・強磁性相)はよく修正できるが,ランダムな画像(常磁性相)は修正できなかった
2. ランダムな画像,まとまりのある画像ともに修正率に3つの相がある
($0 < \beta_m < 0.15$, $0.15 < \beta_m < 0.33$, $0.33 < \beta_m$),

参考文献

スピングラス理論と情報統計力学 西森秀稔 著 [岩波出版]

相転移・臨界現象とくりこみ群 高橋和孝・西森秀稔 著 [丸善出版]

岩波講座 ベイズ統計と統計物理 伊庭幸人 著 [岩波出版]

Appendix

- 1.どんな物理系?
- 2.有限温度推定
- 3.シミュレーテッドアニーリング

どんな物理系?

$$Accuracy = \frac{1}{N} \sum_i \delta(\sigma_i, \xi_i) \text{ について } m_i \equiv \frac{\sigma_i \xi_i + 1}{2} \text{ とおくと } Accuracy = \frac{1}{N} \sum_i m_i$$

$$\begin{aligned} \dots \text{修正率は} H &= -\beta_m \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - \beta_p \sum_i \sigma_i \tau_i = -4\beta_m \sum_{\langle i,j \rangle} J_{i,j} \left(\frac{\sigma_i \xi_i + 1}{2} \right) \left(\frac{\sigma_j \xi_j + 1}{2} \right) - 2\beta_p \sum_i \left(\frac{\sigma_i \xi_i + 1}{2} \right) \xi_i \tau_i + \text{const} \\ &= -\beta'_m \sum_{\langle i,j \rangle} J_{i,j} m_i m_j - \beta'_p \sum_i m_i h_i + \text{const} \quad (J_{i,j} = \xi_i \xi_j, h_i = \xi_i \tau_i) \end{aligned}$$

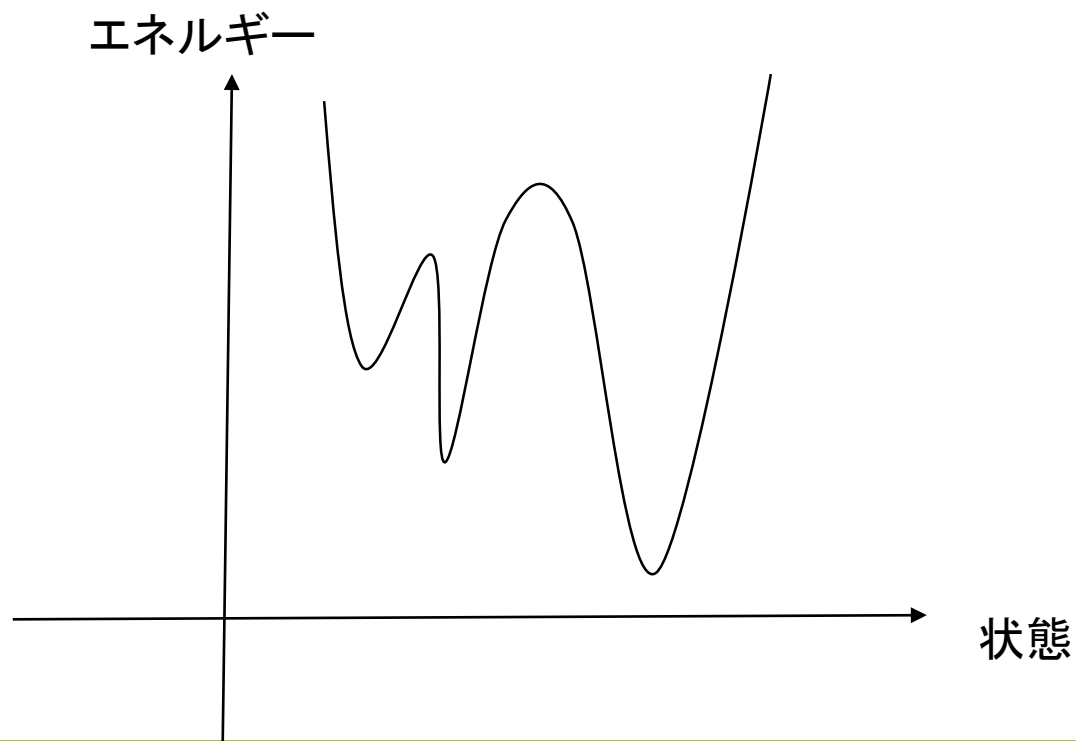
なるハミルトニアンを持つランダム磁場イジング模型の磁化

→このようなハミルトニアンを持つ系は相互作用係数と磁場の絶対値の比によって
基底状態の磁化に3つの相がある?

シミュレーテッドアニーリング

MAP推定において $\Delta E < 0$ となるようにスピンを更新していった

...本当にそれでエネルギーの最小値が求まるのか？



このようなエネルギー分布であった場合、最急降下法で最小値が求まるとは限らない

シミュレーテッドアニーリング

温度 T による状態間の揺らぎを導入:

状態の変化に際し, $\Delta E < 0$ なら変化後の状態を選択, $\Delta E > 0$ でも変化後の状態を**棄却せず**,

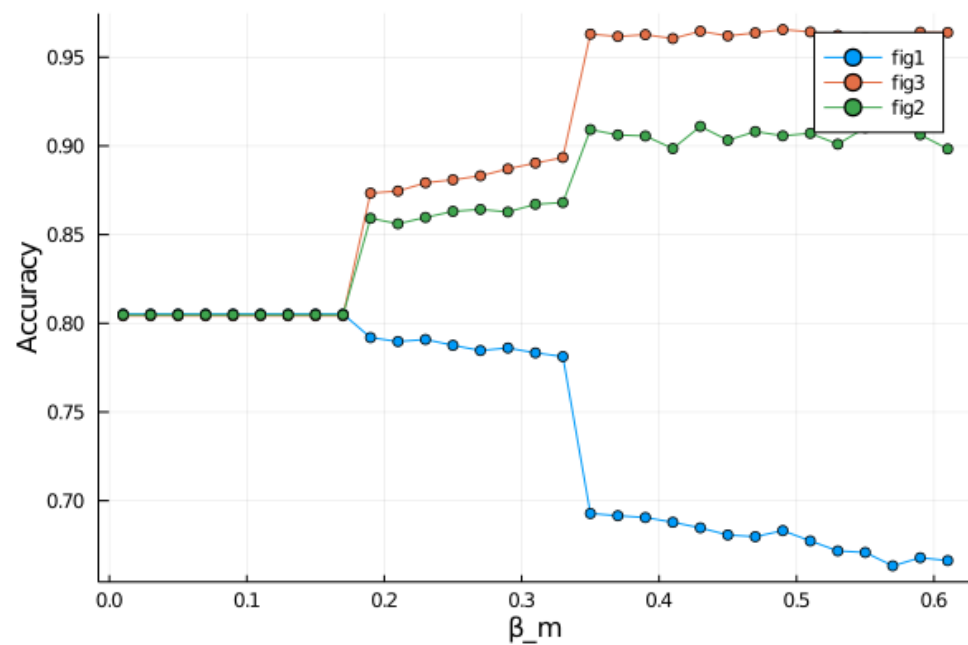
確率 $\exp(-\frac{\Delta E}{T})$ で変化後の状態を選択

温度を T を十分大きい状態からスタートさせ, ゆっくり温度を下げながら上記のアルゴリズムを繰り返すと E の最小値を得ることができる (理論上は無限の時間をかけると確率1で最小値に達する)

実際には整数温度 $T_{initial}$ に対し $T_{initial}$ 回かけて温度を下げていく

$$\dots T_i = T_{initial} \left(1 - \frac{i}{T_{initial}} \right)$$

結果



最急降下法と同じような修正率の振る舞い

...今回のハミルトニアンはそれほど複雑でない?

有限温度推定

(5)式で σ_i 以外のスピンの和を取ったもの

$P(\sigma_i|\{\tau_i\}) = \sum_{\sigma \neq \sigma_i} P(\{\sigma_i\}|\{\tau_i\})$ を求め, $P(+1|\{\tau_i\})$ と $P(-1|\{\tau_i\})$ を比べ大きい方の値をとる

$$\begin{aligned} \dots \sigma_i &= \text{sgn}[P(+1|\{\tau_i\}) - P(-1|\{\tau_i\})] = \text{sgn}\left[\sum_{\sigma_i=\pm 1} \sigma_i \sum_{\sigma \neq \sigma_i} P(\{\sigma_i\}|\{\tau_i\})\right] \\ &= \text{sgn}\left[\frac{\sum_{\sigma_i=\pm 1} \sigma_i \sum_{\sigma \neq \sigma_i} \exp(\beta_m \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j + \beta_p \sum_i \sigma_i \tau_i)}{\sum_{\{\sigma_i\}} \exp(\beta_m \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j + \beta_p \sum_i \sigma_i \tau_i)}\right] = \text{sgn}\left[\frac{\sum_{\{\sigma_i\}} \sigma_i \exp(-E)}{\sum_{\{\sigma_i\}} \exp(-E)}\right] = \text{sgn}[\langle \sigma_i \rangle_{\beta_m}] \end{aligned}$$

$-\beta H$ において $\beta = 1$ にあたる

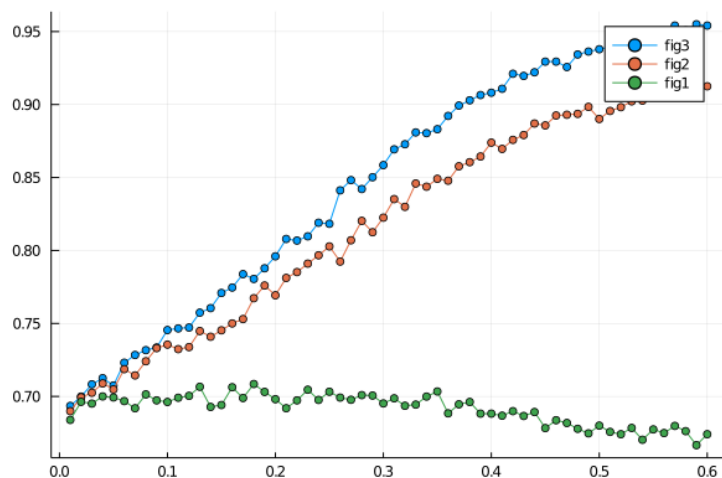
をすべての i について計算してその結果を修復結果とする

MCMC法

平衡分布を得るためのアルゴリズム

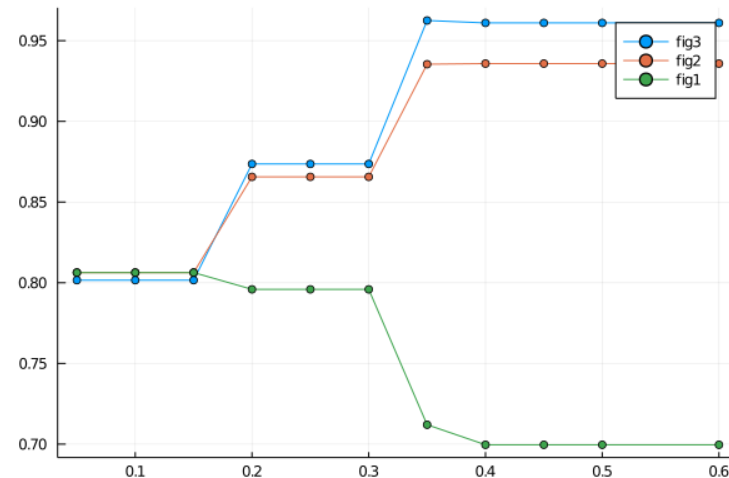
- 1, $i \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$ をランダムに選び, スピン変数を反転させる... $\sigma_i \rightarrow -\sigma_i$
- 2, $\Delta E = E(\sigma_i) - E(-\sigma_i)$ を計算し, $\Delta E < 0$ なら反転したスピンを採用, $\Delta E > 0$ なら 乱数 r ($0 \leq r \leq 1$)を発生させ, $r < \exp(-\Delta E/T)$ なら反転したスピンを, $r > \exp(-\Delta E/T)$ なら元のスピンを採用
- 3, 1と2を N_{MCS} 回繰り返す

結果



$T=1$

青...阪大 赤...女性 緑...ランダム



$T=1/100$

わかること

事前分布の温度が高い(と思われる)画像は修復率が低い
温度を下げると修復率の振る舞いが最大事後確率による結果にちかづいていく